

דף תרגילים מספר 4

בטורי פורייה והתמרות אינטגרליות

התמרת לפלס

1. לחשב את התמרת לפלס של כל אחת מהפונקציות הבאות ואת תחום ההגדרה של כל התמרה:
 א. $t^n \sin(bt)$ עבור $n=1,2$ ועבור $b \neq 0$ ממשי.

ב. $\frac{\sin(t)}{\sqrt{t}} \quad -1 \quad \frac{\sinh(t)}{\sqrt{t}}$

ג. $[t] \sin(t) \quad -1 \quad [t]^2$

ד. $\int_0^t \frac{\sin(x)}{x} dx, \quad \int_0^t \frac{1-\cos(x)}{x^2} dx$

ה. $\int_0^\infty \frac{\sin^2(tx)}{x^2} dx, \quad \int_0^\infty \frac{\sin^3(tx)}{x^2} dx$

ולהשתמש בכמה מהתמרות פורייה אלו על מנת לחשב את האינטגרלים המוכללים הבאים:

$$\int_0^\infty \frac{\sin(t)}{\sqrt{t}} dt, \quad \int_0^\infty \frac{\sin^2(t)}{t^2} dt, \quad \int_0^\infty \frac{\sin^3(t)}{t^2} dt$$

2. לחשב את התמרת לפלס ההפוכה של הפונקציות הבאות:
 א. $\text{sarctan}(1/s) - C$ לקבוע מהו הקבוע C שעבורו לפונקציה זאת יש התמרת לפלס הפוכה.

ב. $e^{-s} \ln(1-s^{-2})$

ג. $e^{-2s} \frac{2s^2 + s - 10}{s^3 - 2s^2 - 6s - 8}$

3. להשתמש בהתמרת לפלס על מנת לפתור את כל אחת מהמשוואות הבאות:

א. $y''(t) + y(t) = \delta_\pi(t) \cos(t), \quad y(0)=0, \quad y'(0)=1$

ב. $f(0)=-1 \quad \text{כאשר} \quad \int_0^t f(x) dx - f'(t) = u_a(t)$

ג. $f''(t) = \int_0^t (t-x)f(x) dx, \quad f(0)=-f'(0)=-1$

$$\int_0^t f''(x)f(t-x)dx=te^{at}, \quad a>0, \quad f(0)=1/a, \quad f'(0)=1 \quad .\text{ד}$$

$$.ה. \quad y'(t)-y(t-1)=t^n \quad \text{עבור } t>0 \text{ ו-} n \text{ טבעי, כאשר } y(t)=0 \quad \text{עבור } t\leq 0. \quad (\text{רמז:})$$

$$\text{לפתח את } \frac{1}{(s-e^{-s})}=\frac{1/s}{1-e^{-s}/s} \quad \text{לטור גיאומטרי מתאים. הפתרון אמור להיות מוצג כסכום סופי בכל נקודה } (t>0)$$

$$.1. \quad \int_0^t \frac{f(x)}{\sqrt{t-x}}dx=sin(\sqrt{t}) \quad (\text{להשתמש בטורי חזקות ולהציג גם את הפתרון כטור חזקות})$$